

**Colle du 05/03 - Sujet 1**  
**Continuité et dérivabilité et suites**

**Question de cours.**

1. Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  soit croissante et comment le démontre-t-on ?
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $x_n$  l'unique solution sur  $[0; \frac{1}{2}]$  de  $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$ . Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

**Exercice 1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ .

1. Montrer que  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont adjacentes.
2. Montrer que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

**Exercice 2.** Soient  $a < b$  et  $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$  une fonction continue.

1. Démontrer que  $f$  admet un point fixe i.e. qu'il existe  $\omega \in [a; b]$  tel que  $f(\omega) = \omega$ .
2. Montrer que ce point fixe est unique si  $f$  est décroissante sur  $[a; b]$ .

**Colle du 05/03 - Sujet 2**  
**Continuité et dérivabilité et suites**

**Question de cours.**

1. Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?
2. On pose  $u_0 = -\frac{1}{2}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$ . Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 1.** Soient  $a < b$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) > 0$ . Démontrer qu'il existe  $C > 0$  telle que  $\forall x \in [a; b]$ ,  $f(x) \geq C$ .

**Exercice 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $x_n$  l'unique solution de l'équation  $x^n + x - 1 = 0$ .

1. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie.
2. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

**Colle du 05/03 - Sujet 3**  
**Continuité et dérivabilité et suites**

**Question de cours.**

1. Énoncer le théorème d'encadrement.
2. Démontrer que  $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer  $f'(0)$ .

**Exercice 1.** Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ . Étudier la régularité de  $f$  (définition, prolongement par continuité, dérivabilité,  $\mathcal{C}^1 \dots$ ).

**Exercice 2.** Soit  $u_1 \in ]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ .

1. Déterminer un encadrement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite.
3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$  et  $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$ . Déterminer la limite de  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \frac{2}{1-2u_1^2} u_n$ .
5. En déduire la limite de  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .